
SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

L. CATTABRIGA

ALCUNI RISULTATI DI PROPAGAZIONE DI REGOLARITA'
PER SOLUZIONI DI EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI CON COEFFICIENTI COSTANTI

9-16 DICEMBRE 1982

Nell'esposizione che segue sono trattati alcuni aspetti del seguente problema.

Sia $P(D)$, $D = (D_1, \dots, D_n)$, $D_j = -i \partial / \partial x_j$, un polinomio differenziale su \mathbb{R}^n e siano $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega$ aperti di \mathbb{R}^n . Si vogliono fornire condizioni sufficienti, e possibilmente necessarie e sufficienti, affinché per un aperto $A \subset \Omega_2$ valga uno dei seguenti risultati:

$$(I) \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega), u \in C^\infty(\Omega_1), P(D)u \in C^\infty(\Omega_2) \Rightarrow u \in C^\infty(A),$$

oppure, per un dato $\sigma \geq 1$,

$$(II) \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega), u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega_1), P(D)u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega_2) \Rightarrow u \in \Gamma^{(\sigma)}(A),$$

od infine più generalmente che per un assegnato $\rho > \sigma$

$$(III) \quad u \in \gamma_0^{(\rho)'}(\Omega), u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega_1), P(D)u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega_2) \Rightarrow u \in \Gamma^{(\sigma)}(A).$$

Qui $\gamma_0^{(\rho)'}$, $\rho > 1$, indica lo spazio di ultradistribuzioni duale dello spazio di Beurling $\gamma_0^{(\rho)}$ e $\Gamma^{(\sigma)}$ lo spazio di Gevrey di esponente $\sigma \geq 1$. Per le notazioni e le principali proprietà di questi spazi rimandiamo al Seminario [C3] tenuto qui lo scorso anno accademico ed alla letteratura in proposito ivi indicata. Ricordiamo che con $\text{sing supp } u$, $\text{sing supp}_\sigma u$ indichiamo l'intersezione di tutti i chiusi (relativamente ad un aperto Ω) al di fuori dei quali $u \in C^\infty$ o, rispettivamente, appartiene a $\Gamma^{(\sigma)}$.

1. E' noto che se $\Omega_1 = \emptyset$ (I) e (II) valgono qualunque siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ed $A = \Omega_2 \subset \Omega$ se e soltanto se P è ipoelettico, rispettivamente σ -ipoelettico. Un altro caso in cui vale (I) qualunque sia P con $A = \Omega_2$ è quello in cui $\Omega_1 = \Omega \setminus K$, K compatto contenuto in Ω , ed $\Omega_2 = \Omega$. Tale proprietà è conseguenza del fatto che se $u \in \mathcal{E}$ l'involuppo convesso di $\text{sing supp } P(D)u$ e di $\text{sing supp } u$ coincidono. Un altro caso particolare di (I) è fornito dal seguente teorema che, secondo la formulazione di [H1] si può enunciare così:

1.1. Teorema. Sia H un semispazio aperto di \mathbb{R}^n e K un compatto contenuto nella chiusura di H . Allora qualunque sia P

$$u \in \mathcal{D}'(H), u \in C^\infty(H \setminus K), P(D)u \in C^\infty(H) \Rightarrow u \in C^\infty(H).$$

Di questo risultato di tipo (I) e del precedente, J. Boman ha dato in [B1] una versione in cui lo spazio C^∞ è sostituito da spazi di funzioni indefinitamente differenziabili dei quali lo spazio $\Gamma^{(\sigma)}$ è caso particolare. Egli prova dunque in particolare le seguenti proprietà di tipo (II):

1.2. Teorema [B1] . Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n , K un compatto contenuto in Ω e $\sigma \geq 1$. Allora qualunque sia P

$$u \in \mathcal{D}'(\Omega), u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega \setminus K), P(D)u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega) \Rightarrow u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega).$$

1.3. Teorema [B1] . Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n , d un numero reale, K un compatto di Ω e $\sigma \geq 1$. Allora qualunque sia P

$$u \in \mathcal{D}'(\Omega), u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega_d \setminus K), P(D)u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega_d) \Rightarrow u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega_d),$$

ove $\Omega_d = \{x \in \Omega; x_n > d\}$.

Per dare una dimostrazione di questo risultato anche quando nello spazio di funzioni indefinitamente differenziabili che si considera non esistano funzioni non identicamente nulle a supporto compatto, come accade in $\Gamma^{(1)}$, Boman, utilizzando una idea di Ehrenpreis, costruisce una successione di funzioni $\chi_\nu \in C_0^\infty$, in seguito rivelatasi assai utile in problemi di questo tipo.

Si sceglie una funzione $\phi \in C_0^\infty$ con $\text{supp } \phi \subset \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1/4\}$ e tale che $\phi \geq 0$, $\int \phi \, dx = 1$ e si pone

$$c_\alpha = \int |D^\alpha \phi| \, dx, \quad c = \max_{|\alpha|=1} c_\alpha.$$

Se K è un compatto di \mathbb{R}^n , sia ψ la funzione caratteristica dell'insieme dei punti a distanza minore di $r/2$ da K , $r > 0$, e per ogni intero positivo ν si definisca

$$(1.1) \quad \chi_\nu = \psi * \phi_r * \phi_{r/\nu} * \dots * \phi_{r/\nu}$$

ove nella convoluzione vi sono ν fattori eguali a $\phi_{r/\nu}$ e si è posto $\phi_a(x) = a^{-n} \phi(x/a)$. Le funzioni χ_ν hanno le proprietà descritte dal seguente lemma

1.4. Lemma [H3]. Sia K un compatto di \mathbb{R}^n ed $r > 0$. Allora per ogni intero positivo ν la funzione χ_ν definita da (1.1) appartiene a C_0^∞ , è uguale ad uno su K e a zero in tutti i punti con distanza $> r$ da K e

$$(1.2) \quad |D^{\alpha+\beta} \chi_\nu(x)| \leq c_\alpha r^{-|\alpha|} (c \nu/r)^{|\beta|} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n, |\beta| \leq \nu.$$

Da questo lemma, quando si scelga $\alpha = 0$ in (1.2), segue che

1.5. Corollario. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e si scelgano il compatto K ed $r > 0$ nel Lemma 1.3 in modo che per ogni v , $\chi_v \in C_0^\infty(\Omega)$. Allora se $u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega)$, $\sigma \geq 1$, per ogni aperto Ω' a chiusura compatta contenuta in Ω esiste una costante positiva $c(\Omega')$ tale che per ogni intero positivo v

$$(1.3) \quad |D^\beta(\chi_v u)(x)| \leq c(\Omega')^v \Gamma(\sigma v + 1), \quad x \in \overline{\Omega'}, \quad |\beta| \leq v,$$

ove Γ indica la funzione di Eulero.

1.6. Osservazione. Se la funzione ϕ a partire dalla quale si costruiscono secondo (1.1) le funzioni χ_v , anziché in C_0^∞ si sceglie in $\gamma_0^{(\rho)}$, allora anche le funzioni χ_v appartengono a $\gamma_0^{(\rho)}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $c(\varepsilon) > 0$ tale che in luogo di (1.2) si ha

$$(1.2) \quad |D^{\alpha+\beta} \chi_v(x)| \leq c(\varepsilon) \varepsilon^{|\alpha|} \Gamma(\rho|\alpha|+1) r^{-|\alpha|} (c v/r)^{|\beta|}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n, |\beta| \leq v.$$

In tal caso, se $u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega)$, $\sigma \geq 1$, e $\text{supp } \chi_v \subset \Omega$ per ogni v , allora per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono delle costanti $c(\Omega')$, in dipendente da ε e v , e $c(\varepsilon, \Omega')$ indipendente da v , tali che

$$(1.3) \quad \|D^\beta(\chi_v u)\|_{\varepsilon, \Omega'} \leq c(\varepsilon, \Omega') c(\Omega')^{|\beta|+1} v^{|\sigma|\beta|}, \quad \beta \in \mathbb{Z}_+^n, |\beta| \leq v$$

dove $\|f\|_{\varepsilon, \Omega'} = \sup_{x \in \Omega'} \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \varepsilon^{-|\alpha|} \Gamma(\rho|\alpha|+1)^{-1} |D^\alpha f(x)|$ è una seminorma in $\gamma_0^{(\rho)}(\Omega)$.

2. I teoremi enunciati nel numero precedente forniscono risultati del tipo di (I) e (II), validi per ogni polinomio P , ma richiedono che $\text{sing supp } u$, rispettivamente $\text{sing supp }_0 u$ siano limitati. L'esempio dei polinomi ipoellittici mostra che è possibile liberarsi di questa restrizione, ove si considerino particolari tipi di polinomi. Un ampio ed approfondito studio di condizioni necessarie e sufficienti al verificarsi di proprietà di tipo (I) è stato fatto da L. Hörmander in [H2], [H4] ed [H5]. Noi ci limitiamo qui a considerare alcuni risultati per i quali valgono analoghe proprietà del tipo (II) e (III).

Un primo risultato che vogliamo richiamare risale essenzialmente a V.V. Grušin [G1] e riguarda i *polinomi di tipo principale e con parte principale a coefficienti reali*. Ricordiamo che un polinomio differenziale $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha$ su \mathbb{R}^n si dice di tipo principale se tutti i suoi vettori caratteristici sono semplici, ossia se indicata con $P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \xi^\alpha$ la sua parte principale, è $\text{grad } P_m(\xi) \neq 0$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tale che $P_m(\xi) = 0$. Se P_m ha coefficienti reali, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $P_m(\xi^0) = 0$, la retta

$$x = x^0 + t \text{ grad } P_m(\xi^0) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

si dice una linea bicaratteristica di P per x^0 . Vale il seguente risultato

2.1. Teorema [G1]. Sia P di tipo principale e con parte principale P_m a coefficienti reali, Ω un aperto di \mathbb{R}^n e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tale che $P(D)u \in C^\infty(\Omega)$. Se $x^0 \in \Omega$ e su ogni linea bicaratteristica ℓ di P per x^0 esiste $y_\ell \notin \text{sing supp } u$, tale che il segmento $[x^0, y_\ell] \subset \Omega$, allora $x^0 \notin \text{sing supp } u$.

Questo risultato equivale ad affermare che se $x^0 \in \text{sing supp } u$, allora per almeno una linea bicaratteristica ℓ di P per x^0 , la componente di $\ell \cap \Omega$ che contiene x^0 è contenuta in $\text{sing supp } u$.

Per gli stessi operatori si prova inoltre un'altra proprietà delle linee bicaratteristiche e cioè che

2.2. Teorema [Z1] . Se P è di tipo principale e di ordine m , con parte principale a coefficienti reali ed ℓ è una linea bicaratteristica di P , allora esiste una soluzione $u \in C^m(\mathbb{R}^n)$ dell'equazione $P(D)u = 0$ con $\text{sing supp } u = \ell$.

Questo teorema ed il Teorema 2.1 consentono di provare un risultato del tipo di (I) per questo tipo di operatori.

2.3. Teorema [H2]. Sia P di tipo principale e con parte principale a coefficienti reali e siano $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega$ aperti di \mathbb{R}^n . Allora per un aperto $A \subset \Omega_2$ vale la proprietà (I) se e soltanto se per ogni linea bicaratteristica ℓ di P , ogni componente di $\ell \cap \Omega_2$ che interseca A interseca anche Ω_1 .

La parte necessaria di questo teorema si prova utilizzando il Teorema 2.2; la parte sufficiente fondandosi sul Teorema 2.1. Questo, a sua volta, può essere provato come conseguenza dell'esistenza di opportune soluzioni fondamentali per il polinomio $P(D)$:

2.4. Teorema [H2]¹⁾. Sia P di tipo principale e con parte principale a coefficienti reali e sia F un chiuso di \mathbb{R}^n contenente una metà di ciascuna linea bicaratteristica di P per l'origine. Allora esiste una soluzione fondamentale $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ di $P(D)$ con $\text{sing supp } E \subset F$.

Il Teorema 2.4 è ottenuto da L. Hörmander come conseguenza di un risultato più generale in cui, per studiare il supporto singolare di una soluzione fondamentale di un polinomio differenziale P , si utilizza l'insieme $L(P)$ delle sue *localizzazioni all'infinito*, ossia l'insieme

¹⁾ Si veda anche [G1].

dei polinomi $\xi \rightarrow Q(\xi)$ tale che per una successione

$$\eta_\nu \rightarrow \infty, \quad P(\xi + \eta_\nu) / \hat{P}(\eta_\nu) \rightarrow Q(\xi),$$

ove $\hat{P}(\eta) = (\sum_{\alpha} |p^{(\alpha)}(\eta)|^2)^{1/2}$. Per ognuno di tali Q si pone

$$\Lambda(Q) = \{\xi \in \mathbb{R}^n; Q(\eta + t\xi) = Q(\eta) \forall t, \eta\}$$

e

$$(2.1) \quad \Lambda'(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, \xi \rangle = 0 \forall \xi \in \Lambda(Q)\}.$$

Si vede subito che P è ipoellittico se e soltanto se tutte le sue localizzazioni sono delle costanti e quindi per ognuna di esse $\Lambda'(Q) = \{0\}$. È pure facile provare che l'insieme $\{\Lambda'(Q), Q \in L(P)\}$ è l'insieme delle linee bicaratteristiche di P per l'origine se P è di tipo principale e con parte principale a coefficienti reali, e l'insieme delle linee caratteristiche ²⁾ per l'origine se P è un polinomio omogeneo in due variabili. Per questi ultimi polinomi vale un risultato come quello del Teorema 2.4 con F sostituito da un chiuso di \mathbb{R}^n contenente una metà di ciascuna linea caratteristica di P per l'origine e quindi, con la stessa sostituzione, un teorema come il Teorema 2.1 ³⁾. Ne segue allora

2.5 Teorema. Sia P un polinomio omogeneo in due variabili e siano $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega$ aperti di \mathbb{R}^2 . Allora la proprietà (I) vale per ogni aperto $A \subset \Omega_2$ tale che per ogni linea caratteristica ℓ di P , ogni componente di $\ell \cap \Omega_2$ che interseca A interseca anche Ω_1 .

Ancora utilizzando le localizzazioni di P all'infinito, in

2) Ossia della rette ortogonali ai vettori caratteristici di P .

3) Si veda anche il Teorema 5.1 di [H2].

[H2] è provato il seguente Teorema ⁴⁾

2.6 Teorema [H2]. Sia P un polinomio su \mathbb{R}^n ed $H_N = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, N \rangle \geq 0\}$, $N \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Se esiste un cono Δ ⁵⁾ aperto e convesso contenente N ed una costante $c_1 > 0$ tale che

$$(2.2) \quad \zeta \in \mathbb{C}^n, P(\zeta) = 0, \operatorname{Im} \zeta \in -c_1 N - \Delta, \zeta \rightarrow \infty \Rightarrow \operatorname{Im} \zeta \rightarrow \infty,$$

allora esiste una soluzione fondamentale $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\operatorname{sing\,supp} E \subset \Delta' = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, \xi \rangle \geq 0, \xi \in \Delta\}.$$

Si noti che Δ' è un cono chiuso, convesso, proprio (cioè non contenente alcuna retta), contenuto in H_N e contenente N e tale che $\Delta' \cap \partial H_N = \{0\}$.

D'altra parte, come in Hörmander [H2], si prova facilmente che

2.7 Teorema. Sia P un polinomio avente una soluzione fondamentale $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ con $\operatorname{sing\,supp} E$ contenuto in un cono proprio chiuso e convesso W (con vertice l'origine) e sia $N \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tale che $W \subset H_N = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, N \rangle \geq 0\}$ e $W \cap \partial H_N = \{0\}$. Allora vale la proprietà (I) con $\Omega = \Omega_2 = A = \mathbb{R}^n$, $\Omega_1 =$ il complementare $\mathbb{C}H_N$ di H_N :

$$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), u \in C^\infty(\mathbb{C}H_N), P(D)u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Si noti che esistono polinomi per i quali vale la conclusione di questo teorema, ma che non soddisfano a (2.2) ⁶⁾. Quest'ultima è inve-

⁴⁾ Per questo teorema e per il Teorema 2.7 si veda anche [S1].

⁵⁾ Ossia un sottoinsieme di \mathbb{R}^n tale che $y \in \Delta \Rightarrow \lambda y \in \Delta \quad \forall \lambda \geq 0$.

⁶⁾ Per esempio se $n = 3$, $N = (0, 0, 1)$, $P(\xi) = \xi_1^2 + \xi_3^2$.

è soddisfatta da tutti i polinomi che sono prodotti di un polinomio iperbolico rispetto ad N e di un polinomio ipoellittico ⁷⁾.

2.8 Cenni alla dimostrazione del Teorema 2.7. Sia $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \equiv 1$ in un intorno dell'origine. E' $P(D)(\phi E) = \delta - f$, con $f = -\sum_{\alpha \neq 0} p^{(\alpha)}(D)E D^\alpha \phi / \alpha!$. E' $f \in \mathcal{E}'$ e per un $t > 0$, $\text{sing supp } f \subset \{x; \langle x, N \rangle \geq t\}$. E' possibile quindi scrivere $f = f_1 + f_2$ con $f_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ed $f_2 \in \mathcal{E}'$ con $\text{supp } f_2 \subset \{x; \langle x, N \rangle \geq t/2\}$. Se quindi u soddisfa alle ipotesi indicate è

$$P(D)u * (\phi E) = u * P(D)(\phi E) = u - u * f_1 - u * f_2$$

e quindi

$$u - u * f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

D'altra parte, dall'ipotesi che sia $u \in C^\infty(\{x; \langle x, N \rangle < 0\})$, segue che $u * f_2 \in C^\infty(\{x; \langle x, N \rangle < t/2\})$, onde $u \in C^\infty(\{x; \langle x, N \rangle < t/2\})$. Iterando questo ragionamento si conclude che $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Da questo teorema si trae subito il seguente corollario

2.9 Corollario. Se P soddisfa alle ipotesi del Teorema 2.7 e V è un cono chiuso tale che $V \setminus \{0\} \subset C(-W)$, esiste un numero finito di vettori $N^j \in W \setminus \{0\}$ e di numeri $d_j > 1$, $j = 1, \dots, \ell$, tali che

$$V \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} \Delta_j, \quad \Delta_j = \{y \in \mathbb{R}^n; |y| \leq d_j \langle y, N^j \rangle\},$$

e per ogni $j = 1, \dots, \ell$

⁷⁾ Di più, questi polinomi soddisfano anche alla condizione che si ottiene sostituendo nella (2.2) N con $-N$ e Δ con $-\Delta$.

$$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), u \in C^\infty(\mathbb{C}\Delta_j), P(D)u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Il Teorema 2.1 è stato esteso da L. Hörmander [H4], utilizzando le localizzazioni all'infinito di un polinomio P.

2.10 Definizione [H4]. Si dicono *spazi bicaratteristici per l'origine di un polinomio P* i sottospazi di \mathbb{R}^n che sono limiti di una successione di sottospazi $\Lambda'(Q_j)$, $Q_j \in L(P)$, definiti da (2.1), rispetto alla metrica

$$d(V,W) = \sup_{\substack{x \in V \\ |x|=1}} \inf_{\substack{y \in W \\ |y|=1}} |x-y|, \quad V, W \text{ sottospazi di } \mathbb{R}^n.$$

Con B_x , $x \in \mathbb{R}^n$, si indica l'insieme degli spazi bicaratteristici di P per x.

2.11 Teorema [H4]. Sia P tale che

$$(2.3) \quad P^{(\alpha)}(\eta) / P(\eta) \rightarrow 0 \quad \text{per } \eta \rightarrow \infty, \quad |\alpha| > 1.$$

Siano poi $\Omega_1 \subset \Omega$ aperti di \mathbb{R}^n ed $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tale che $u \in C^\infty(\Omega_1)$, $P(D)u \in C^\infty(\Omega)$. Se $x^0 \in \Omega$ e per ogni $b \in B_{x^0}$ la componente di $b \cap \Omega$ contenente x^0 incontra Ω_1 , allora $x^0 \notin \text{sing supp } u$.

Altrimenti detto: nelle ipotesi del Teorema 2.11 su P ed u, se A è un aperto $\subset \Omega$ tale che per ogni spazio bicaratteristico b di P ogni componente di $b \cap \Omega$ che incontra A incontra pure Ω_1 , allora vale la (I) con $\Omega_2 = \Omega$, ossia

$$u \in \mathcal{D}'(\Omega), u \in C^\infty(\Omega_1), P(D)u \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow u \in C^\infty(A).$$

Si noti che alla (2.3) soddisfano tutti i polinomi di tipo

principale, tutti i polinomi iperbolici ed i polinomi prodotti di polinomi di questi tipi. Si noti anche che P soddisfa alla (2.3) se e soltanto se tutte le sue localizzazioni all'infinito sono polinomi di ordine ≤ 1 . Ne segue che per ogni $Q \in L(P)$ gli spazi $\Lambda'(Q)$ definiti da (2.1) hanno dimensione ≤ 2 se P è a coefficienti complessi e ≤ 1 se P ha coefficienti reali.

2.12 Osservazione. I Teoremi 2.5 e 2.11 provano anche che per i polinomi omogenei in due variabili e per quelli che soddisfano a (2.3) vale la proprietà (I) con $\Omega = \Omega_2 = A = \mathbb{R}^n$ e $\Omega_1 = \mathbb{C}V$, V un qualunque cono proprio chiuso e convesso, ossia che per tali V

$$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), u \in C^\infty(\mathbb{C}V), P(D)u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

3. Una proprietà del tipo della (II), con $\sigma = 1$, è stata provata da K.G. Andersson [A1] per i polinomi P di tipo principale e con parte principale a coefficienti reali. Questo risultato, del tutto analogo al Teorema 2.3 è ottenuto dopo aver costruito una soluzione fondamentale di P con supporto singolare analitico contenuto in certi insiemi, connessi con opportune localizzazioni di P . Tale costruzione è effettivamente eseguita nel caso in cui P sia più debole della sua parte principale e questa sia localmente iperbolica ⁸⁾, ciò che si verifica quando P è di tipo principale e con parte principale a coefficienti reali. La costruzione utilizza una opportuna partizione dell'unità sullo spazio duale di \mathbb{R}^n , mediante funzioni del tipo delle funzioni χ_ν definite da (1.1).

3.1 Teorema [A1]. Sia P di tipo principale e con parte principale a coefficienti reali e siano $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega$ aperti di \mathbb{R}^n . Allora per un

⁸⁾ Si veda in 4.9 la definizione di polinomio omogeneo localmente iperbolico.

aperto $A \subset \Omega_2$ vale la proprietà (II) con $\sigma = 1$, se e soltanto se per ogni linea bicaratteristica ℓ di P , ogni componente di $\ell \cap \Omega_2$ che interseca A interseca anche Ω_1 .

Si può provare una proprietà del tipo (II) analoga a quella del Teorema 2.7, imponendo a P una condizione più forte della (2.2). Per mostrare questo risultato anche nel caso in cui sia $\sigma = 1$, si segue la dimostrazione del Teorema 2.7 utilizzando una opportuna soluzione fondamentale di P costruita in [M1] e le funzioni χ_ν definite da (1.1). Valgono i seguenti teoremi analoghi ai Teoremi 2.6 e 2.7 rispettivamente.

3.2 Teorema [M1]. Sia P un polinomio su \mathbb{R}^n ed esistano un cono proprio aperto e convesso Δ , due numeri $k > 1$ e $\sigma \geq 1$ e due costanti positive c_1 e c_2 tali che

$$\xi \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}, |\xi| > k, \eta \in \Delta, |\eta| = 1, P(\xi + i\tau\eta) = 0 \rightarrow$$

$$\tau \geq -c_1 \quad \text{oppure} \quad \tau \leq -c_2 |\xi|^{1/\sigma}.$$

Allora esiste una soluzione fondamentale $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ di P con $\text{sing supp}_\sigma E \subset \Delta' = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, \eta \rangle \geq 0 \forall \eta \in \Delta\}$.

3.3. Teorema. Sia $\sigma \geq 1$ e P un polinomio avente una soluzione fondamentale $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ con $\text{sing supp}_\sigma E$ contenuto in un cono chiuso convesso e proprio W e sia $N \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tale che $W \subset H_N$ e $W \cap \partial H_N = \{0\}$. Allora vale la proprietà (II) con $\Omega = \Omega_2 = A = \mathbb{R}^n$, $\Omega_1 = \mathbb{C}H_N$, ossia

$$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), u \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{C}H_N), P(D)u \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n) \rightarrow u \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n).$$

Dimostrazione. Per semplicità sia $N = (0, \dots, 0, 1)$ e sia χ_ν la funzione definita da (1.1) quando K è la sfera di centro l'origine e rag

gio 1 ed $r = 1$. Posto, analogamente a quanto fatto in 2.8, $f_\nu = -\sum_{\alpha \neq 0} p^{(\alpha)}(D)E D^\alpha \chi_\nu / \alpha!$, sia $\psi_\nu(x_n)$ la funzione definita su R da (1.1) quando K è l'intervallo $[-2, t/2]$ ed $r = t/4$, con t come in 2.8. Siano $f_{1\nu} = \psi_\nu f_\nu$ ed $f_{2\nu} = (1 - \psi_\nu) f_\nu$ onde

$$u - u * f_{2\nu} = P(D)u * \chi_\nu E + u * f_{1\nu}.$$

È $f_{1\nu} \in C_0^\infty$, $f_{2\nu} \in \mathcal{D}'$ con $\text{supp } f_{2\nu} \subset \{x; x_n \geq t/2\}$ e, tenuto conto del Corollario 1.4, $|D^\beta f_{1\nu}(x)| \leq c^\nu \Gamma(\sigma\nu+1)$ se $|\beta| \leq \nu$, con c indipendente da ν . Se ora u soddisfa alle ipotesi indicate, è $P(D)u * (\chi_\nu E) \in \Gamma^{(\sigma)}(R^n)$ uniformemente rispetto a ν e se $|\beta| \leq \nu$, $\sup_{x \in \Omega} |D^\beta (u * f_{1\nu})(x)| \leq c^\nu \Gamma(\sigma\nu+1)$, qualunque sia l'aperto limitato Ω e

$$(3.1) \quad \sup_{x \in \Omega'} |D^\beta (u * f_{2\nu})(x)| \leq c(\Omega')^\nu \Gamma(\sigma\nu+1), \quad \text{se } \Omega' \subset \subset \{x \in R^n; x_n < t/2\}.$$

Ne segue che anche u soddisfa alla (3.1). Iterando questo procedimento si prova così che

$$\sup_{x \in \Omega'} |D^\beta u(x)| \leq c(\Omega')^\nu \Gamma(\sigma\nu+1), \quad |\beta| \leq \nu,$$

qualunque sia l'aperto limitato Ω' . Poiché ν è un qualunque numero naturale, ciò prova il teorema.

Questo teorema consente evidentemente di affermare che vale il Corollario 2.9 con $\Gamma^{(\sigma)}$, $\sigma \geq 1$, in luogo di C^∞ .

Un caso particolare di polinomi soddisfacenti alla ipotesi del Teorema 3.3 è quello dei polinomi iperbolico-ellittici definiti da J. Fehrman.

3.4 Definizione [F1]. Un polinomio P su \mathbb{R}^n si dice *iperbolico-ellittico rispetto al vettore* $N \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se N non è caratteristico per P ed esistono due costanti positive c_1, c_2 tali che

$$\xi \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, P(\xi + itN) = 0 \Rightarrow t \geq -c_1 \text{ oppure } t \leq -c_2 |\xi|.$$

In [F1] è provato che se P è iperbolico-ellittico rispetto ad N , allora lo è pure rispetto a tutti gli η appartenenti ad un cono aperto Δ contenente N od al suo opposto. P ha in tal caso una soluzione fondamentale analitica fuori di un cono chiuso W il cui involuppo convesso è il cono proprio chiuso e convesso duale di Δ , ed un'altra soluzione fondamentale analitica fuori del cono $-W$. Il cono W si dice *superficie del fronte d'onda di* P .

Tenuto conto che $W \cap (-W) = \{0\}$, dal Corollario 2.9 con $\Gamma^{(1)} = A$ in luogo di C^∞ , segue che

3.5 Corollario. Sia Δ un cono aperto e P un polinomio iperbolico-ellittico rispetto ai vettori appartenenti a $\Delta \cup (-\Delta)$. Allora esiste un numero finito di vettori $N^j \in (\bar{\Delta} \cup (-\bar{\Delta})) \setminus \{0\}$ e di numeri $d_j > 1$, $j = 1, \dots, \ell$ tali che

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\ell} \Delta_j, \Delta_j = \{y \in \mathbb{R}^n; |y| \leq d_j \langle y, N^j \rangle\}$$

e per ogni $j = 1, \dots, \ell$

$$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), u \in A(C\Delta_j), P(D)u \in A(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in A(\mathbb{R}^n).$$

4. Passiamo ad indicare alcuni casi in cui vale una proprietà del tipo della (III). Per provare proprietà di questo tipo si possono utilizzare soluzioni fondamentali di P appartenenti al duale di uno spazio di Beurling delle quali si conosca il σ -supporto singolare e le funzioni χ_ν definite da (1.1) a partire da una $\phi \in \gamma_0^{(\rho)}$.

Procedendo come per la dimostrazione del Teorema 3.3, tenuto conto che $\Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n) \subset \gamma^{(\rho)}(\mathbb{R}^n)$ se $\rho > \sigma$ e delle (1.3'), si prova anzitutto che

4.1 Teorema. Sia P un polinomio avente una soluzione fondamentale $E \in \gamma_0^{(\rho)}(\mathbb{R}^n)$ con $\text{sing supp}_\sigma E \subset W$, ove $\rho > \sigma \geq 1$ e W è un cono chiuso proprio e convesso. Sia poi $N \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tale che $W \subset H_N = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, N \rangle \geq 0\}$ e $W \cap \partial H_N = \{0\}$. Allora vale la proprietà (III) con $\Omega = \Omega_2 = A = \mathbb{R}^n$ ed $\Omega_1 = \mathbb{C}H_N$, ossia

$$u \in \gamma_0^{(\rho)}(\mathbb{R}^n), u \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{C}H_N), P(D)u \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n).$$

4.2 Corollario. Se P soddisfa alle ipotesi del Teorema 4.1 e V è un cono chiuso tale che $V \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}(-W)$, esiste un numero finito di vettori $N^j \in W \setminus \{0\}$ e di numeri $d_j > 1$, $j = 1, \dots, \ell$, tali che

$$V \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} \Delta_j, \quad \Delta_j = \{y \in \mathbb{R}^n, |y| \leq d_j \langle y, N^j \rangle\},$$

e per ogni $j = 1, \dots, \ell$

$$u \in \gamma_0^{(\rho)}(\mathbb{R}^n), u \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{C}\Delta_j), P(D)u \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n).$$

Una condizione sufficiente affinché P soddisfi alle ipotesi del Teorema 4.1 è fornita dal seguente teorema che generalizza il Teorema 3.2

4.3 Teorema. Se per un dato polinomio P esistono un cono proprio, aperto e convesso Δ , dei numeri $k > 1$, $\rho > \sigma \geq 1$ e due costanti positive c_1, c_2 tali che

$$\xi \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}, |\xi| > k, \eta \in \Delta, |\eta|=1 \quad P(\xi+i\tau\eta) = 0 \Rightarrow$$

$$\tau \geq -c_1 |\xi - \langle \xi, \eta \rangle \eta|^{1/\rho} \text{ oppure } \tau \leq -c_2 |\xi|^{1/\sigma},$$

allora P ha una soluzione fondamentale $E \in \gamma_0^{(\rho)'}(\mathbb{R}^n)$ con $\text{sing supp}_\sigma E \subset \Delta'$.

Alle ipotesi di questo teorema con $\rho = m/(m-1)$ soddisfano ad esempio tutti i polinomi prodotti di un polinomio σ -ipoellittico e di un polinomio di ordine m con parte principale iperbolica ⁹⁾. Il seguente risultato può essere considerato come un caso limite del Teorema 4.3.

4.4 Teorema [C1]. Sia $P(D) = \sum_{j=0}^m a_j(D')D_n^j$, a_j polinomi in $D'=(D_1, \dots, D_{n-1})$ di ordine $\leq M-j$ e sia $A_k = \{\xi \in \mathbb{R}^{n-1}; |\xi'| \leq k\} \cup \{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}; \sum_{j=0}^m |a_j(\xi')| = 0\}$. Se esistono $k > 1$, $\sigma \geq 1$, $\rho \in]\sigma, +\infty[$ e due costanti positive c_1 e c_2 tali che

$$(\xi', \lambda) \in (\mathbb{R}^{n-1} \setminus A_k) \times \mathbb{C}, \quad P(\xi', \lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Im } \lambda \geq -c_1 |\xi'|^{1/\rho} \text{ oppure } \text{Im } \lambda \leq -c_2 (|\xi'| + |\text{Re } \lambda|)^{1/\sigma},$$

allora P ha una soluzione fondamentale $E \in D'(R; \gamma_0^{(\rho)'}(\mathbb{R}^{n-1}))$ con $\text{sing supp}_\sigma E \subset H = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}$ ¹⁰⁾.

Per i polinomi soddisfacenti alle ipotesi del Teorema 4.4 e, più in generale, per quelli che hanno una soluzione fondamentale ultradistribuzione con σ -supporto singolare contenuto in un semispazio, vale la

⁹⁾ Si veda [H1], Teorema 5.7.3. ed [L1].

¹⁰⁾ Per $\rho = +\infty$ si intende $1/\rho = 0$ e $\gamma_0^{(\rho)'} = \mathcal{D}'$.

seguinte proprietà di tipo (III).

4.5 Teorema. Se P ha una soluzione fondamentale $E \in \gamma_0^{(\rho)'}$ (\mathbb{R}^n) con $\text{sing supp}_\sigma E \subset H_N = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, N \rangle \geq 0\}$, $N \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\sigma \geq 1$, $\rho \in]\sigma, +\infty]$, allora qualunque sia il cono chiuso, proprio e convesso $V \subset H_N$ tale che $V \cap \partial H_N = \{0\}$ ¹¹⁾ è

$$u \in \gamma_0^{(\rho)'}$$
 (\mathbb{R}^n), $u \in \Gamma^{(\sigma)}$ ($\mathbb{C}V$), $P(D)u \in \Gamma^{(\sigma)}$ (\mathbb{R}^n) $\Rightarrow u \in \Gamma^{(\sigma)}$ (\mathbb{R}^n).

Dimostrazione. Sia per semplicità $N = (0, \dots, 0, 1)$ e sia $\chi_V \in \gamma_0^{(\rho)}$ la funzione definita da (1.1) quando K è la sfera di centro l'origine e raggio r e $\phi \in \gamma_0^{(\rho)}$. È

$$\chi_V u = E * P(D)(\chi_V u) = E * \chi_V P(D)u - E * f_V,$$

$$\text{con } f_V = - \sum_{\alpha \neq 0} P^{(\alpha)}(D)u D^\alpha \chi_V / \alpha!.$$

Dalle proprietà di V e di χ_V e dal fatto che $u \in \Gamma^{(\sigma)}$ ($\mathbb{C}V$) $\subset \gamma^{(\rho)}$ ($\mathbb{C}V$), segue che esiste $t \geq d^{-1}r$, $d \geq |N|^{-1}$, tale che $f_V \in \gamma^{(\rho)}$ (H_t), con $H_t = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n < t\}$. Sia ora $\psi_V \in \gamma_0^{(\rho)}$ la funzione definita su \mathbb{R} da (1.1) con $K = [-2, t/2]$, $r = t/4$ e $\phi \in \gamma_0^{(\rho)}$ e siano $f_{1V} = \psi_V f_V$ ed $f_{2V} = (1 - \psi_V)f_V$. È $f_{1V} \in \gamma_0^{(\rho)}$, $\text{supp } f_{1V} \subset \{x \in \mathbb{R}^n, r \leq |x| \leq 2r, x_n < t\}$ ed $f_{2V} \in \gamma^{(\rho)'}$, $\text{supp } f_{2V} \subset \{x \in \mathbb{R}^n; x_n \geq t/2\}$, inoltre

$$(4.1) \quad \chi_V u + E * f_{2V} = E * \chi_V P(D)u - E * f_{1V} = v_V.$$

Le maggiorazioni (1.3') valgono con $\chi_V P(D)u$ ed f_{1V} in luogo di $\chi_V u$ qua-

¹¹⁾ Si noti che queste condizioni implicano che per una costante $d \geq |N|^{-1}$ è $V \subset \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq d \langle x, N \rangle\}$.

Insomma sia l'aperto limitato $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$. Valgono inoltre con E in luogo di $\chi_\nu u$ quando $\bar{\Omega}' \in H_0 = \{x \in \mathbb{R}^n, x_n < 0\}$. Pertanto per le derivate del secondo membro v_ν di (4.1) risulta

$$|D^\beta v_\nu(x)| \leq c(\Omega) |\beta|+1 \cdot \nu^{|\sigma|\beta|}, \quad x \in \Omega, \quad |\beta| \leq \nu$$

per ogni aperto limitato Ω di \mathbb{R}^n e inoltre

$$|D^\beta (E * f_{2\nu})(x)| \leq c(K) |\beta|+1 \Gamma(\sigma|\beta|+1), \quad x \in K, \quad \beta \in \mathbb{Z}_+^n$$

per ogni compatto $K \subset H_{t/2}$, ove $c(\Omega)$ e $c(K)$ sono indipendenti da ν .

Da (4.1), notando che $\chi_\nu u = u$ quando $|x| \leq r$, segue allora che

$$|D^\beta u(x)| \leq c(K) |\beta|+1 \cdot \nu^{|\sigma|\beta|}, \quad x \in K \cap \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq r\}, \quad |\beta| \leq \nu$$

per ogni $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Ciò mostra che $u \in \Gamma^{(\sigma)}(K \cap \{|x| \leq r\})$ e quindi, per la arbitrarietà di r che $u \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n)$.

Per la sua analogia con un risultato provato in [C2] sull'esistenza di soluzioni in uno spazio di Gevrey, segnaliamo il seguente corollario dei Teoremi 4.4 e 4.5.

4.6 Corollario. Sia P un polinomio su \mathbb{R}^n e sia $\sigma \geq 1$. Se esiste un numero finito di vettori $N^j \in \mathbb{R}^n$, con $|N^j| = 1, j = 1, \dots, \ell$, due numeri $\rho > \sigma$ e $k > 1$, e due costanti positive c_1 e c_2 tali che

$$a) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ esiste } j \in \{1, \dots, \ell\}, \text{ tale che } \langle y, N^j \rangle > 0,$$

$$b) \quad \xi \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, |\xi - \langle \xi, N^j \rangle N^j| > k, \quad P(\xi + itN^j) = 0 \Rightarrow$$

$$t \geq -c_1 |\xi - \langle \xi, N^j \rangle N^j|^{1/\rho} \text{ oppure } t \leq -c_2 |\xi|^{1/\sigma},$$

allora esistono delle costanti $d_j > 1$, $j = 1, \dots, \ell$, tali che

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\ell} \Delta_j, \quad \Delta_j = \{y \in \mathbb{R}^n; |y| \leq d_j \langle y, N^j \rangle\},$$

e per ogni $j = 1, \dots, \ell$

$$u \in \gamma_0^{(\rho)'}(\mathbb{R}^n), \quad u \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{C}\Delta_j), \quad P(D)u \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n).$$

Le condizioni a) e b) del Corollario 4.6, con $\sigma = 1$ e $\rho = m/(m-1)$, sono in particolare soddisfatte se P è un polinomio di ordine m con parte principale iperbolico-ellittica. In questo caso il Corollario 4.6 fornisce un risultato che estende quello del Corollario 3.5, poiché come è provato in [F1] ogni polinomio iperbolico-ellittico ha parte principale iperbolico-ellittica ed è di questa più debole nel senso definito in [H1].

Come è provato in [C4], la condizione b) è soddisfatta se P è un polinomio in due variabili ed N^j è un qualunque vettore non caratteristico per P . Da ciò segue che per i polinomi in due variabili oltre al Corollario 4.6 vale anche il seguente

4.7. Corollario. Sia P un polinomio su \mathbb{R}^2 e $\sigma \geq 1$. Allora per ogni cono chiuso convesso e proprio $V \subset \mathbb{R}^2$ esiste $\rho > \sigma$ tale che vale la (III) con $\Omega_1 = \mathbb{C}V$, $\Omega_2 = \Omega = A = \mathbb{R}^n$, ossia

$$u \in \gamma_0^{(\rho)'}(\mathbb{R}^2), \quad u \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{C}V), \quad P(D)u \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{R}^2) \Rightarrow u \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{R}^2).$$

Questo risultato va confrontato con quello indicato nella Osservazione 2.12.

4.8. Osservazione. In [C2] è provato che se $\sigma \geq 1$ è raziona-

Le condizioni a) e b) del Corollario 4.6 assicurano che $P(D)\Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n) = \Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n)$. Come ho indicato nel seminario [C3] dello scorso anno, la condizione del Teorema 4.4 con σ razionale ≥ 1 assicura che esiste una soluzione $u \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n)$ dell'equazione $P(D)u = f$, quando f soddisfa ad una condizione che sembra essere essenzialmente equivalente alla esistenza di una costante $c > 0$ tale che per ogni compatto K contenuto nel complementare di un cono $V = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq d \langle x, N \rangle\}$, $d > 0$,

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq c^{|\alpha|+1} \Gamma(\sigma|\alpha|+1), \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Questo risultato è da confrontare con quello del Teorema 4.5. e 4.9. Terminiamo ricordando che utilizzando la teoria delle iperfunzioni, T. Kawai ha provato in [K1] precisi risultati di propagazione delle singularità analitiche delle soluzioni dell'equazione $P(D)u = 0$, quando P ha parte principale P_m localmente iperbolica, ossia quando per ogni $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tale che $P_m(\xi^0) = 0$ esistono un intorno U_{ξ^0} di ξ^0 , un vettore $N \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ed un $\varepsilon > 0$ tali che

$$\xi \in U_{\xi^0}, \tau \in \mathbb{C}, |\tau| < \varepsilon \quad P(\xi + \tau N) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Im } \tau = 0.$$

E' facile vedere che ogni polinomio omogeneo di tipo principale ed a coefficienti reali è localmente iperbolico.

Ricordiamo anche che per polinomi con parte principale localmente iperbolica Hörmander ha provato in [H5] che è $P(D)A(\mathbb{R}^n) = A(\mathbb{R}^n)^{12}$.

Da quanto precede ci sembra di qualche interesse esaminare le connessioni fra risultati riguardanti l'esistenza in spazi di Gevrey di soluzioni dell'equazione $P(D)u = f$ e risultati del tipo di quelli dei Corollari 4.2 e 4.6 e del Teorema 4.5.

¹²⁾ Si veda anche [A2].

RIFERIMENTI

- [A1] K.G. ANDERSSON, Propagation of analyticity of solutions of partial differential equations with constant coefficients, Ark. Mat. 8 (1971), 277-302.
- [A2] K.G. ANDERSSON, Global solvability of partial differential equations in the space of real analytic functions, Coll on Analysis, Rio de Janeiro 1972, Analyse fonctionelle, Hermann, 1974.
- [B1] J. BOMAN, On the propagation of analyticity of solutions of differential equations with constant coefficients, Ark. Mat. 5(1964), 271-279.
- [C1] L. CATTABRIGA, Some applications of Hironaka's theorem on the resolution of the singularities to the study of a fundamental solution for linear partial differential operators, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 49(1979), 49-64.
- [C2] L. CATTABRIGA, Solutions in Gevrey spaces of partial differential equations with constant coefficients, Soc. Math. de France, Astérisque 89-90(1981), 129-151.
- [C3] L. CATTABRIGA, Esistenza di una soluzione fondamentale con supporto singolare contenuto in un semispazio e suriettività di operatori differenziali a coefficienti costanti, Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino 40(1982), 51-79.
- [C4] L. CATTABRIGA, On the surjectivity of differential polynomials on Gevrey spaces, Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino, in corso di stampa.
- [F1] J. FEHRMAN, Hybrids between hyperbolic and elliptic differential operators with constant coefficients, Ark. Mat. 13(1975), 209-235.

- [G1] V.V. GRUŠIN, The extension of smoothness of solutions of differential equations of principal type, Soviet. Mat. 4(1963), 248-251.
- [H1] L. HÖRMANDER, Linear partial differential operators. Springer 1963.
- [H2] L. HÖRMANDER, On the singularities of solutions of partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 23(1970), 329-358.
- [H3] L. HÖRMANDER, Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math. 24(1971), 671-704.
- [H4] L. HÖRMANDER, On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo-differential equations, Enseignement Math. 17(1971), 99-163.
- [H5] L. HÖRMANDER, On the singularities of solutions of partial differential equations with constant coefficients, Israel J. Math. 13 (1972), 82-105.
- [H6] L. HÖRMANDER, On the existence of real analytic solutions of partial differential equations with constant coefficients, Inventiones Math. 21(1973), 151-182.
- [K1] T. KAWAI, On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations I, J. Math. Soc. Japan 24(1972), 481-517.
- [L1] E. LARSSON, Generalized hyperbolicity, Ark. Mat. 7(1966), 11-32.
- [M1] D. MARI, Costruzione di una soluzione fondamentale per operatori ibridi iperbolico-ellittici, appartenente ad una classe di Gevrey fuori di un cono, Boll. Un. Mat. Ital. (5), 18-B(1981), 151-175.
- [S1] T. SHIROTA, On the propagation of regularity of solutions of partial differential equations with constant coefficients, Proc. J. Acad. 38(1962), 587-590.

- [Z1] M. ZERNER, Solutions singulières d'équations aux dérivées partielles, Bull. Soc. Math. France 91(1963), 203-226.